

Moti rotazionali piani - moto uniforme

Pensiamoci nel piano, ovvero consideriamo $\underline{v} = (u, v, 0)$. Possiamo definire il potenziale delle velocità e sfruttare le proprietà del moto rotazionale:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad \underline{\omega} = \underline{0} \quad \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad \nabla^2 \phi = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Esiste poi la funzione di corrente Ψ :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}; \quad \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Usiamo Ψ per esprimere le vorticità:

$$\underline{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \hat{k} \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 \Psi \hat{k}$$

Osserviamo inoltre che $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \Psi = 0$, ovvero ϕ e Ψ sono funzioni armoniche.

Inoltre vale:

$$(\nabla \phi) \cdot (\nabla \Psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \cdot v - v \cdot u = 0$$

Risultato non valido nei punti di ristagno dove le velocità è nulla.

Interpretiamo ora x e y come componenti di un numero complesso e definiamo anche il potenziale complesso:

$$z = x + iy$$

$$w(z) = w_r(z) + i w_i(z)$$

Le condizioni di Cauchy-Riemann impongono:

$$\frac{\partial w_r}{\partial x} = \frac{\partial w_i}{\partial y}$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial w_r}{\partial y} = -\frac{\partial w_i}{\partial x}$$

Ne segue che, nel nostro caso $w = \phi + i\Psi$. Si ha pertanto:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - i v$$

Sorgente

Consideriamo il potenziale $W(z) = C_1 \ln z$, con C_1 costante reale, immaginaria o complessa. Ricordando che $z = x + iy$ eseguiamo la derivata rispetto a z stesso e moltiplichiamo per il complesso coniugato!

$$\frac{dW}{dz} = \frac{C_1}{z} = \frac{C_1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = C_1 \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Prendiamo C_1 reale, $C_1 = \frac{q}{2\pi}$ e passiamo in coordinate polari:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{r \cos \theta}{r^2} - i \frac{r \sin \theta}{r^2} \right) = \\ &= \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

La q che abbiamo introdotto è l'intensità della sorgente, pari alla portata volumetrica per unità di profondità (in direzione z) attraverso una qualsiasi superficie chiusa che racchiuda l'origine. Il campo è irrotazionale e per ottenere la portata che attraversa una circonferenza concentrica alla sorgente basta moltiplicare per l'elemento $r_0 d\theta$ (perpendicolare a r_0) e integrare tra 0 e 2π :

$$\frac{q}{2\pi r_0} \cdot r_0 d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi r_0} r_0 d\theta = q \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = q$$

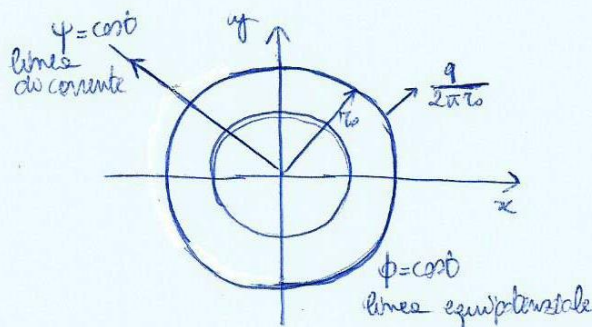
In effetti la portata è proprio l'intensità della sorgente poiché deve valere la conservazione della massa. Nell'origine, dove essa si trova, il campo di moto è irrotazionale: tale punto va escluso (la portata molto grande in un'area molto piccola va interpretata come una portata infinita in un punto adimensionale).

In definitiva si hanno:

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r \qquad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$\ln(z) = \ln(r \cdot e^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \ln e = \ln r + i\theta$$

Graficamente



Vortice

Assumiamo ora C immaginaria, $C_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi}$;

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi z} (\cos\theta - i\sin\theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi z} (\sin\theta + i\cos\theta), \quad \phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Confrontando con $u+iv$ si nota che la velocità è proporzionale a $\sin\theta$ lungo x e a $\cos\theta$ lungo y . La circolazione è pari proprio a Γ :

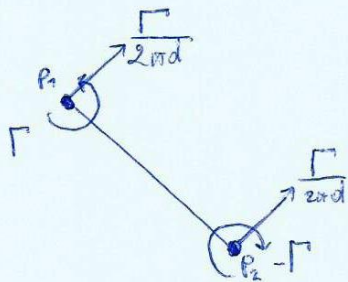
$$|\Gamma| = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \Rightarrow \oint \underline{v} \cdot d\underline{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r_0} r_0 d\theta = \Gamma$$

Il dominio non è semplicemente connesso e la vorticità ω si concentra nell'origine; il moto vorticoso aumenta se mi avvicino ad essa.

Dato l'asse del vortice, le superfici equipotenziali sono piani appartenenti al fascio con asse coincidente con quello del vortice. Le superfici di corrente sono cilindri concentrici al vortice. Quest'ultimo è assimilabile a un tubo vorticoso che si è ridotto ad una sola linea mantenendo costante la sua intensità.

Coppia di vortici

Consideriamo due vortici puntuali con circolazione uguale, ma opposta:



Due campi si sovrappongono e si genera una velocità assoluta che fa muovere i vortici.

Il primo, in P_1 , si muove per la velocità indotta da P_2 e viceversa. Tale velocità è data da (in modulo):

$$|v_{21}| = |v_{12}| = \frac{|\Gamma|}{2\pi d} = \frac{|\Gamma|}{2\pi \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Una coppia di vortici si muove inoltre in direzione ortogonale al segmento che li unisce.

Le trasformazioni conformi

Abbiamo scoperto che esiste un legame tra il potenziale di velocità ϕ e la funzione di corrente ψ per i moti incomprimibili irrotazionali piani. Essi sono espressi dal potenziale complesso $w = \phi + i\psi$. Qualsiasi funzione di $z = x + iy$ può essere quindi vista come potenziale complesso di un campo di moto irrotazionale piano.

Il nostro obiettivo è quindi quello di determinare tali campi di moto usando un metodo particolare: la trasformazione conforme.

Si tratta di stabilire una relazione tra la variabile complessa z (piano x, y) e una nuova variabile ζ (piano ξ, η):

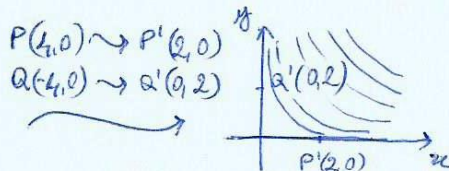
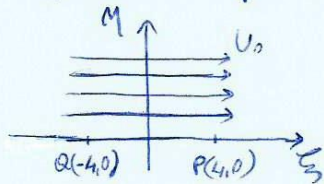
$$\zeta = f(z) \quad \text{con inverse} \quad z = g(\zeta)$$

Il campo di moto risulta trasformato nella nuova variabile ed è descritto da un nuovo potenziale $w(\zeta) = \hat{w}(g(\zeta))$. Si può ottenere la velocità complessa $\frac{dw}{dz} = \frac{d\hat{w}}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$. Gli elementi infinitesimi (non quelli finiti) nel piano x, y sono in rapporto di similitudine con quelli nel piano ξ, η . Inoltre le angolarità nel piano z diventano singolarità nel piano ζ .

Attraverso la trasformazione del moto dal piano z al piano ζ si determina più agevolmente il campo di moto stesso.

La trasformazione $\zeta = z^m$

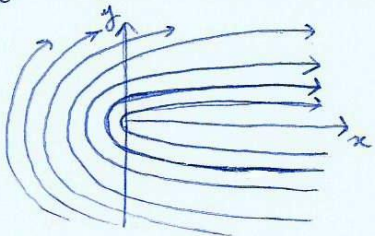
Nel piano ζ il potenziale è $W = A\zeta$, nel piano z è $W = A \cdot z^m$. Consideriamo il caso particolare per cui $\zeta = z^2$:



Il campo di "apertura" α del ζ, η "si chiude" a $\eta_m = \pi/2$ su x, y . In generale per $m > 1$ le pareti delimitano un angolo π/m , cioè inferiore

o uguale a π . Inoltre se $w(\zeta) = U_0 \zeta$ si ha $w(z) = U_0 z^2$.

Per $1/2 < m < 1$ il campo "si apre": per $m = 2/3$ l'angolo è $3/2 \pi$, per $m = 1/2$ è 2π , cioè il moto avviene attorno a una lastra molto sottile:



$$\hat{w}(\zeta) = U_0 \cdot \zeta^2 \quad \zeta = z^{1/2} = \sqrt{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{dw}{dz} = \frac{d\hat{w}}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = v_\zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

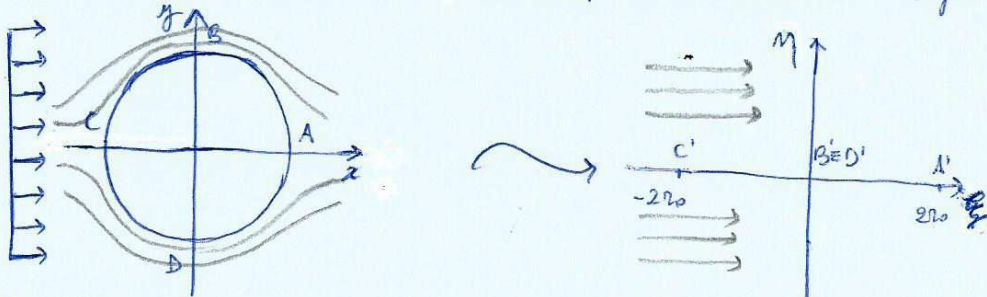
Quindi per $z \rightarrow 0 \Rightarrow v_z \rightarrow \infty$. Attraverso la trasformazione si ottiene che in zero la velocità tende ad infinito.

La trasformazione di Joukowski

Analizziamo ora una trasformazione particolarmente importante:

$$\zeta = z + \frac{r_0^2}{z}$$

Introducendo $z = r_0 \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \zeta = r_0 (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2r_0 \cos\theta$. Ciò significa che i punti esterni alla circonferenza di raggio r_0 centrata nell'origine finiscono nei punti del piano ζ . La circonferenza si riduce infatti a un segmento:



Il punto $z=0$ finisce all'infinito!

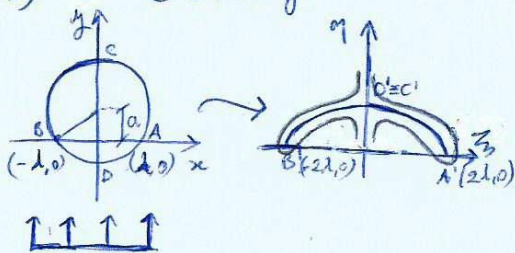
Il potenziale è $w(\zeta) = U\zeta$ nel piano ζ , quindi $w(z) = U(z + \frac{r_0^2}{z})$ nel piano z .

I profili alari portanti di Joukowski

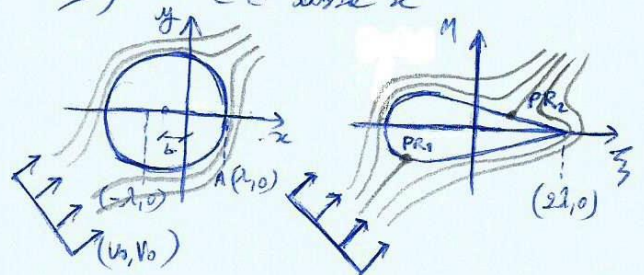
Un corpo in moto in un fluido deve possedere profili alari, tali da fornire buona portanza e ridurre la resistenza. Il moto deve essere irrotazionale e lo strato limite non deve staccarsi dal profilo. Si deve generare una circolazione di segno opportuno (teorema di Kutta-Joukowski). Si aggiunge il teorema di Kutta che afferma che l'intensità di Γ deve essere tale da far sì che il punto di ristagno coincida con la cuspidè presente nel bordo d'uscita.

A seconda della posizione del centro della circonferenza di raggio r_0 si distinguono quattro possibilità: La prima è quella già illustrata sopra, con il cerchio che finisce nel segmento. Le altre tre sono:

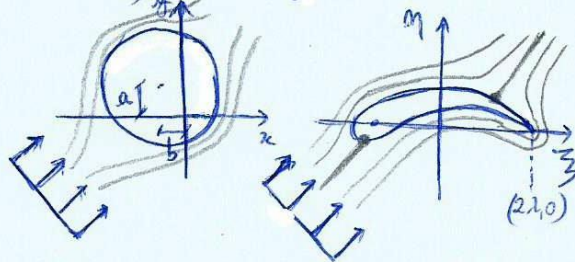
I) $C \in$ asse y



II) $C \in$ asse x

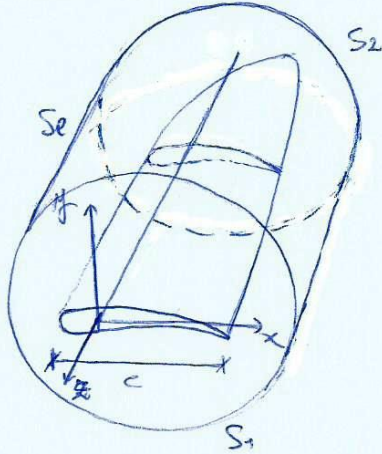


III) $C \notin$ agli assi



Moti irrotazionali tridimensionali

Come i moti irrotazionali bidimensionali, anche quelli tridimensionali risentono del paradosso di d'Alembert. Se vi sono punti in comune, notevoli sono almeno le differenze. Quella che vogliamo analizzare è la resistenza indotta, che si manifesta quando un corpo tridimensionale è soggetto a portanza. Consideriamo a tal fine un'ala di lunghezza L che avanza con velocità costante U .



La corda c si riduce procedendo verso l'estremità. La portanza totale è data da:

$$P = \rho \cdot U \int \Gamma(z) \cdot dz$$

Consideriamo il volume di controllo mostrato in figura:

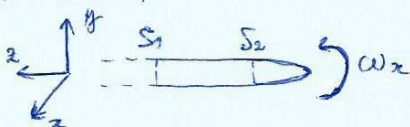
$$\int_V \nabla \cdot \underline{w} \, dV = 0 = \int_{S_1} \underline{w} \cdot \underline{m} \, dS + \int_{S_2} \underline{w} \cdot \underline{m} \, dS + \int_{S_e} \underline{w} \cdot \underline{m} \, dS$$

$\quad \quad \quad = \Gamma_1 \quad \quad \quad = -\Gamma_2$

$$\Rightarrow -\Gamma_1 + \Gamma_2 = \int_{S_e} \underline{w} \cdot \underline{m} \, dS$$

Quindi se la sezione del profilo è costante l'integrale su S_e è nullo e la circolazione riferita a S_1 è uguale a quella riferita a S_2 . Nel caso in figura $|\Gamma_1| > |\Gamma_2|$ poiché la sezione su S_1 ha corda c maggiore. Entrambe le circolazioni sono negative, quindi l'integrale su S_e dà risultato positivo. Nella parte superiore del profilo $w_x > 0$, cioè la vorticità è non nulla solo in uno strato molto sottile.

Sotto l'ala la pressione è maggiore rispetto alla parte superiore e si genera un moto del fluido dal basso verso l'alto. Osservando l'estremità dell'ala, dove la vorticità di c è brusca, si nota che il flusso è molto intenso:



di resistenza indotta. È legata alla tridimensionalità.

Il vortice, che presenta valori minimi di pressione nel suo centro, produce una forza che si oppone all'avanzamento dell'ala. Essa prende il nome di resistenza indotta.